ПРОБЛЕМЫ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ
Нелинейные динамические системы

Вып. 46 **Межвузовский сборник научных трудов** **2014**

УДК 519.7

Г.В. Алферов, О.А. Малафеев, А.С. Мальцева
Санкт-Петербургский государственный университет

Россия, 198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
alferovgv@gmail.com, malafeyevoa@mail.ru, luna171@mail.ru

ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ ПОИСКА ПОДВИЖНОГО ОБЪЕКТА ПРИ ИНСПЕКТИРОВАНИИ

Задачи поиска, которые состоят в отыскании наилучшего способа получения решения, в том числе при организации антикоррупционных мероприятий, возникают во многих областях человеческой деятельности [1–9]. *В работе исследуется модель поиска подвижного объекта при условии, что преследователь располагает ограниченной информацией относительно убегающего. Рассмотрен случай, когда преследователю достоверно неизвестна скорость убегающего, но известен диапазон ее изменения. Предлагается алгоритм вычисления времени поиска. Другие подходы к решению задач изложены в работах* [10–11].

Ключевые слова: игры поиска; игры инспектирования; спиральный поиск; оптимальный поиск; подводные роботы.

Рассмотрим следующую ситуацию. Корабль-перехватчик, оснащенный эхолотом, обнаружил перископ подводной лодки, которая в этот же момент, опустившись под воду, стала перемещаться в неизвестном направлении с неизвестной скоростью. Необходимо перехватить лодку за минимально возможное время.

Работа частично поддержана грантом РФФИ №14-06-00326.

Предполагается, что корабль-перехватчик не знает точно скорость подводной лодки, но ему известен дискретный набор скоростей, одна из которых является действительной скоростью подводной лодки. Далее корабль-перехватчик будем называть преследователем, а подводную лодку – убегающей и обозначать соответственно P и E.

Опишем алгоритм спирального поиска и нахождения времени поиска в условиях, когда преследователю достоверно неизвестна скорость убегающего. Предположим, что скорость преследователя настолько больше скорости убегающей лодки, что завершение поиска гарантировано. В начальный момент t_0 обнаружения преследователь P точно определяет местоположение подводной лодки. Таким образом, ему известно расстояние D_0 между ним и убегающим. Для нахождения гарантированного времени завершения поиска построим нормативную модель детерминированного уровня. Введем полярную систему координат (ρ,φ,O) так, чтобы полюс O, находился в точке обнаружения подводной лодки, а полярная ось ρ проходила через точку, в которой находился корабль-перехватчик. Преследователю точно неизвестна скорость убегающего v, однако известно, что она выбирается из дискретного множества $V^E=\{v_1,...,v_n\}$. Максимально возможную скорость корабля-преследователя обозначим через u. Тогда динамика убегающего E описывается уравнениями:

$$\dot{\rho}^E=v,$$

$$\dot{\varphi}^E=0.$$

Динамика преследователя описывается уравнениями

$$\dot{\rho}^P=\alpha, |\alpha|\le u_\rho,$$

$$\dot{\varphi}^P=0, |\beta|\le u_\varphi,$$

$$u=\sqrt{(u_\rho)^2+(u_\varphi)^2}.$$

Так как скорость убегающего достоверно неизвестна, преследователь делает предположение, что E имеет скорость $v_1 \in V^E$. Для поимки подводной лодки в момент t_0 преследователь начинает движение со скоростью u в направлении на точку O и движется так до момента t_1, в который игроки оказываются на одинаковом расстоянии от точки O, т.е. чтобы выполнялось равенство

$$\rho_1^P = \rho_1^E \quad \text{или} \quad \int_{t_0}^{t_1} v_1 dt + u(t_1 - t_0) = D_0.$$

Если встречи не произошла, то в момент t_1 преследователь, выбрав направление обхода, продолжает двигаться вокруг точки O так, чтобы постоянно находиться на таком же расстоянии от точки O, что и убегающий. Найдем траекторию движения, соответствующую данной стратегии поведения. Направление обхода будем считать совпадающим с положительным направлением отсчета полярного угла. Скорость корабля-перехватчика разложим на две составляющие: радиальную u_ρ и тангенциальную u_φ. Радиальная составляющая – скорость, с которой корабль отдаляется от полюса, т.е. $u_\rho = \dot{\rho}$.Тангенциальная составляющая – это линейная скорость вращения относительно полюса, т.е. $u_\varphi = \rho\dot{\varphi}$. Для того, чтобы встреча произошла, преследователь движется с максимальной скоростью, оставляя радиальную составляющую скорости равной скорости убегающего. Тогда для нахождения траектории преследователя необходимо решить систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\rho} = v_1,$$

$$\dot{\varphi}^2 \rho^2 = (u)^2 - (v_1)^2.$$

Начальными условиями для этой системы будут

$$\varphi(t^*) = 0,$$

$$\rho(t_1) = v_1 t_1.$$

Решая ее, находим:

$$\varphi(t) = \frac{\sqrt{(u)^2 - (v_1)^2}}{v_1} \ln \frac{v_1 t}{v_1 t_1},$$

$$\rho(t) = v_1 t.$$

Тогда время поиска можно выразить как функцию полярного угла:

$$t(\varphi) = t_1 \exp\left(\frac{v_1 \varphi}{\sqrt{(u)^2 - (v_1)^2}} \right).$$

Таким образом, траектория состоит из прямолинейных участков и участков логарифмической спирали. Придерживаясь такой стратегии поведения, преследователь обнаружит подводную лодку за время, не превышающее прохождения одного витка. Тогда, если корабль, обойдя виток спирали, не находит подводную лодку, значит первоначальное предположение о скорости убегающего было неверным. Значит необходимо выбирать следующую скорость $v_2 \in V^E$ и предположить, что это действительная скорость. Убегающий за время t_2 прошел расстояние $\rho^E(t_2) = v_2 t_2$, а преследователь $\rho^P(t_2) = v_1 t_2$. Возможны два случая.

Если $\rho^P(t_2) > \rho^E(t_2)$, тогда расстояние между игроками будет равно $D_2 = \rho^P(t_2) - \rho^E(t_2)$ и для нахождения момента времени t_3 необходимо решить уравнение

$$\int_{t_2}^{t_3} v_2 dt + u(t_3 - t_2) = D_2 .$$

Если $\rho^P(t_2) < \rho^E(t_2)$, значит, расстояние между игроками будет равно $D_2 = \rho^E(t_2) - \rho^P(t_2)$ и для нахождения момента времени t_3 необходимо решить уравнение

$$u(t_3 - t_2) - \int_{t_2}^{t_3} v_2 dt = D_{.2} .$$

После движения по прямолинейному участку, преследователь движется по спирали. Таким образом, преследователь может гарантировать поимку, перебрав все элементы множества V^E. Преследователю для уменьшения гарантированного времени перехвата целесообразно упорядочить перебор скоростей убегающего. Однако если это становится известно убегающему, он может двигаться со скоростью, которую преследователь собирается проверять в последнюю очередь, что тогда позволит убегающему максимизировать время поиска. Таким образом, задачу поиска можно рассматривать в условиях противодействия как игровую задачу поиска. Пусть убегающий может выбрать любую скорость из множества $V^E = \{v_1,...,v_n\}$ и любое направление из множества $\alpha = \{\alpha_1,...,\alpha_n\}$. Тогда множество чистых стратегий убегающего (1 игрока) будет множество комбинаций возможных скоростей v_i его движения и направлений движения α, а множество чистых стратегий преследователя – множество всевозможных перестановок скоростей убегающего. Выигрышем будет время поимки убегающего, которое находится с помощью описанного выше алгоритма. Рассмотрим пример решения матричной игры поиска.

Пример 1. Пусть первоначальное расстояние между преследователем и убегающим было 50 километров. Убегающий выбирает скорость из множества $V^E = \{4{,}10{,}16\}$, а направление из множества $\alpha = \{8{,}10{,}16\}$. Максимальная скорость преследователя $u = 80 км/ч$. Тогда множество стратегий убегающего:

$$(\alpha_1, v_1), (\alpha_1, v_2), (\alpha_1, v_3), (\alpha_2, v_1), (\alpha_2, v_2),$$
$$(\alpha_2, v_3), (\alpha_3, v_1), (\alpha_3, v_2), (\alpha_3, v_3).$$

Множество стратегий преследователя:

$$(v_1, v_2, v_3), (v_1, v_3, v_2), (v_2, v_1, v_3),$$
$$(v_2, v_3, v_1), (v_3, v_1, v_2), (v_3, v_2, v_1).$$

Матрица полученной игры выглядит следующим образом:

0,6	0,6	1,32	5,56	2,161	4,77
0,9	3,79	0,57	0,57	3,249	2,039
2,2	0,9	2,19	1,38	0,536	0,536
0,6	0,6	1,33	5,57	2,165	4,778
0,9	3,8	0,57	0,568	3,263	2,048.
2,21	1	2,21	1,39	0,54	0,54
0,6	0,6	1,33	5,6	2,177	4,803
0,92	3,86	0,58	0,576	3,306	2,075
2,26	1,02	2,26	1,42	0,551	0,551

Игра решена методом Брауна–Робинсон, значение игры равно 1,57. Стратегия убегающего (1/20, 0, 0, 0, 0, 0, 1/10, 1/4, 3/5), стратегией преследователя (9/20, 1/20, 3/20, 1/20, 1/4, 1/20).

Предположим теперь, что корабль-перехватчик, имея на борту n катеров с глубинными бомбами в момент t_0 засек на различных расстояниях от него на поверхности моря перископы n подводных лодок, которые в тот же момент совершили погружение под воду и с фиксированными скоростями стали перемещаться прямолинейно в различных направлениях. Требуется отправить катера на перехват подводных лодок оптимальным образом, т. е. так, чтобы сумма гарантированных времен перехвата лодок была бы минимальной. Для решения задачи составим матрицу эффективности $A=(a_{ij})$, элемент которой есть гарантированное время перехвата подлодки j катером i, которое складывается из времени достижения катером точки засечки перископа и его полного времени прохождения по логарифмической спирали перехвата. Введем переменные величины x_{ij}, которые могут принимать только два значения 0 или 1 следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{\textit{если i катер назначен для j лодки}}, \\ 0, & \text{\textit{если i катер не назначен для j лодки}}. \end{cases}$$

Требуется найти такой план назначений – матрицу $X = \{x_{ij}\}, i = 1...n, j = 1...n$ –, который минимизирует время поиска, при этом каждый катер назначают искать не более чем одну лодку, и каждую лодку может искать не более чем один катер. Рассмотрим несколько численных примеров решения задачи распределения катеров для поимки нескольких подводных лодок.

Пример 2. Пусть корабль-перехватчик обнаружил 4 подводные лодки. Первоначальное расстояние до каждой из них соответственно 100 км, 200 км, 50 км и 163 км. Преследователь имеет 4 катера для поимки подводных лодок. Максимальная скорость каждого катера соответственно 74 км/ч, 90 км/ч, 178 км/ч и 124 км/ч. Первая лодка движется по прямой $\alpha_1 = 23$ со скоростью $v_1 = 23$ км/ч, вторая – $\alpha_2 = 137$ со скоростью $v_2 = 50$ км/ч, третья – $\alpha_3 = 187$ со скоростью $v_3 = 67$ км/ч, четвертая – $\alpha_4 = 50$ со скоростью $v_2 = 70$ км/ч. Тогда матрица для задачи о назначениях выглядит следующим образом:

$$
\begin{matrix}
1{,}18 & 0{,}98 & 0{,}52 & 0{,}73 \\
14{,}43 & 7{,}06 & 1{,}77 & 3{,}3 \\
373{,}78 & 12{,}12 & 0{,}77 & 2{,}13 \\
14{,}43 & 3 & 0{,}96 & 1{,}53
\end{matrix}.
$$

Решаем игру венгерским методом. Значение целевой функции равно 8,08. Конечная таблица выглядит следующим образом:

$$
\begin{matrix}
[0] & 0 & 2{,}37 & 1{,}22 \\
9{,}63 & 2{,}46 & [0] & 0{,}17 \\
369{,}98 & 8{,}52 & 0 & [0] \\
11{,}22 & [0] & 0{,}79 & 0.
\end{matrix}
$$

Существуют различные подходы к формализации и решению задач поиска подвижных объектов. Поиск объектов можно представить как разворачивающийся во времени процесс, последовательность действий в котором может приводить к различным результатам. Задачей теории поиска объектов при этом является выработка наилучшего плана поиска, обеспечивающего из многих возможных такой способ действий, который приводит к обнаружению объекта в кратчайшее время.

Таким образом, в данной работе:

- представлена последовательность действий поисковых сил, соответствующая оптимальному плану и составляющая алгоритм поиска;
- представлен алгоритм для нахождения времени завершения поиска в условиях, когда преследователю достоверно неизвестна скорость убегающего;
- разработана стратегия поведения преследователя;
- определена траектория движения преследователя, соответствующая данной стратегии;
- решен ряд контрольных примеров, показывающих применение алгоритма.

Библиографический список

1. *Алферов Г.В., Малафеев О.А., Мальцева А.С.* Процесс поиска и захвата объекта. Процессы управления и устойчивость // Тр. 44-й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов / под ред. Н.В.Смирнова, Т.Е.Смирновой. СПб.: Изд. дом С.-Петерб. гос. ун-та, 2013. С. 113–119.

2. *Алферов Г.В.* Генерация стратегии робота в условиях неполной информации о среде // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2009. Вып. 35. С. 4–24.

3. *Лутманов С.В.* Математические модели оптимального поведения в конфликтных ситуациях со многими участниками // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2009. Вып. 39. С. 57–71.

4. *Малафеев О.А., Соснина В.В.* Модель управления процессом кооперативного трехагентного взаимодействия // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические сис-

темы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2009. Вып.39. С. 131–145.

5.*Лутманов С.В.* Компромиссное управление динамической системой в условиях многостороннего конфликта // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2009. Вып.40. С. 53–67.

6.*Малафеев О.А., Пахар О.В.* Динамическая нестационарная задача инвестирования проектов в условиях конкуренции // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2009. Вып. 41. С. 103–109.

7.*Алферов Г.В., Малафеев О.А., Мальцева А.С.* Трехэтапный процесс поиска подводной лодки // Тр. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, оптимизация». Минск, 2013. С. 177–178.

8.*Лутманов С.В., Попова Е.С.* Реализация процедуры управления с поводырем в одной антагонистической дифференциальной игре двух лиц наведения на целевое множество // Проблемы механики и управления. Нелинейные динамические системы: межвуз. сб. науч. тр. / Перм. гос. ун-т. Пермь, 2013. Вып. 45. С. 39–54.

9.*Alferov G.V., Malafeev O.A., Maltseva A.S.* Game-theoretic model of inspection by anti-corruption group // International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics 2014 (ICNAAM 2014), in Rhodes. Greece (in print).

10. *Малафеев О.А.* Управляемые конфликтные системы. СПбГУ. СПб, 2000.

11. *Колокольцов В Н., Малафеев О.А.* Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение. Ч. I // Вестник гражданских инженеров. 2010. С. 144–153.